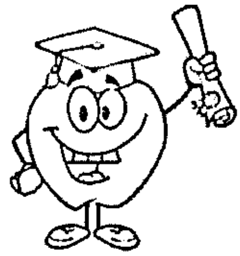


الرياضيات

4

التحليل (5)

13

السنة: الثالثة

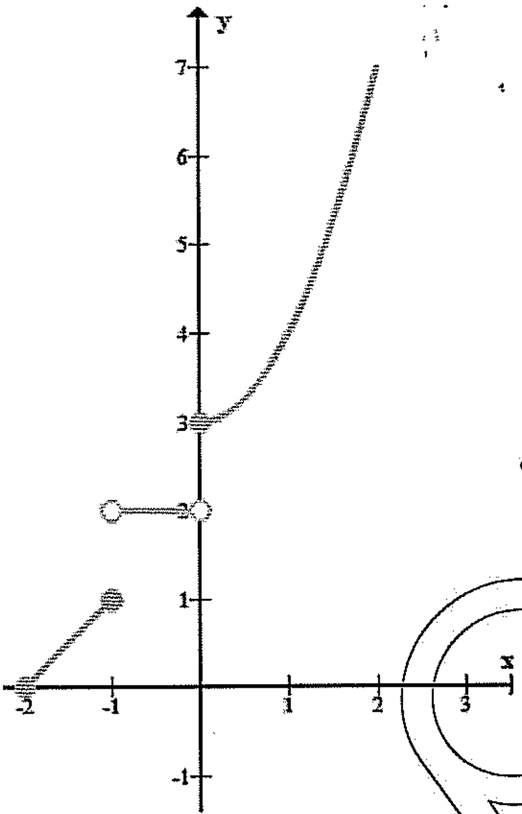
الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

تمرين1:

احسب التكامل التالي:

$$I_1 = \int_{-2}^{2} x^2 dg \quad ; g(x)$$



$$= \begin{cases} x+2 & ; -2 \le x \le -1 \\ 2 & ; -1 < x < 0 \\ x^2+3 & ; 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

ثم استنتج: $\int_{-2}^{2} g d(x^2)$

الحل:

نلاحظ ان الدالة g تعاني من عدد منتهي من نقاط الانقطاع:

$$C_1 = -1 \quad , \quad C_2 = 0$$

$$I = \int_{-2}^{2} f dg$$

نجزئ التكامل الى ثلاث تكاملات على حسب المجالات:

$$I = \int_{-2}^{-1} x^2(1)dx + \int_{-1}^{0} x^2.0dx + \int_{0}^{2} x^2(2x)dx$$

$$+ f(-1)[g(-1+0) - g(-1-0)]$$

$$+ f(0)[g(0+0) - g(0-0)]$$

$$= \int_{-2}^{-1} x^2(1)dx + \int_{-1}^{0} x^2.0dx + \int_{0}^{2} x^2(2x)dx + \underbrace{(1)}_{f(-1)} \underbrace{(2-1)}_{g_1} + \underbrace{(0)}_{f(0)} \underbrace{(3-2)}_{g_2}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + 0 + \left[\frac{x^4}{2}\right]_{0}^{2} + 1 = \left(\frac{-1}{3} + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{16}{2} - 0\right) + 1$$

$$= \frac{7}{3} + 8 + 1 = \frac{34}{3}$$

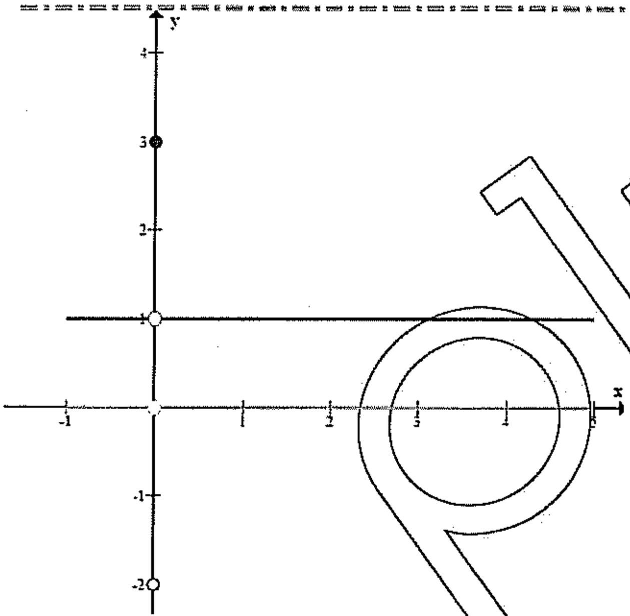
$$\int_{-2}^{2} f dg + \int_{-2}^{2} g df = [f(x)g(x)]_{-2}^{2}$$

نطبق نظرية التكامل بالتجزئة:

$$\frac{34}{3} + \int_{-2}^{2} g df = [f(2)g(2)] - [f(-2)g(-2)]$$

$$= (4 \times 7) - (4 \times 0) \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2} g df = \frac{50}{3}$$



تمرين2:

برهن أن تكامل استيلجس المعطى بالشكل $\int_{-1}^{5} f dg$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0 \\ -2 & ; x = 0 \end{cases}$$

غير كمول على $[-1,5]$

الحل:

نلاحظ أن كل من الدالتين f, g معرفتين على المجال المغلق ومحدودتين وبطريقة مماثلة سنثبت أنه من

أجل تجزئة ما لدينا قيمتين مختلفتين.

لنأخذ التجزئة:

$$P = \{-1 = x_0 \underbrace{\leq}_{t_1} x_1 \underbrace{\leq}_{t_2} x_2 < \cdots < x_{i-1} \underbrace{\leq}_{t_i} x_i = 0 \underbrace{\leq}_{t_{i+1}} x_{i+1} < \cdots \underbrace{\leq}_{t_n} x_n = 5\}$$

حيث $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$

حتى تكون الدالة قابلة للمكاملة يجب أن تحقق الشرط:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \{f(t_1)[g(x_1) - g(x_0)] + f(t_2)[g(x_2) - g(x_1)] + \cdots$$
$$+ f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + f(t_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \cdots$$
$$+ f(t_n)[g(x_n) - g(x_{n-1})]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{0 + \cdots + 0 + f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + f(t_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + 0\}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} -2f(t_i) + 2f(t_{i+1})$$

نميز حالتين:

$$1) t_i = 0 \Rightarrow A = -2(3) + 2(1) = -4$$
$$2) t_i \neq 0 \Rightarrow A = -2(1) + 2(1) = 0$$

النهايتين غير متساوتين اذن التكامل غير موجود.

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.

Math Mad Team